数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 124-134

グレイ符号に付随する sum of digits と数論的関数の関係について

大東文化大・経済　神谷諭一
(Yuichi Kamiya)
Department of Modern Economics
Faculty of Economics
Daito Bunka University

明治学院大・経済　村田玲音
(Leo Murata)
Department of Mathematics
Faculty of Economics
Meiji Gakuin University

1 Delangeの定理から

$q\geq 2$ は自然数とし，固定する．任意の自然数 n は

$$n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}(n)q^{k},\quad a_{k}(n)\in \mathbf{Z},\quad 0\leq a_{k}(n)\leq q-1,$$

と一意的に展開できる (n の q 進展開). n の q 進展開に対して，数論的関数 $S_{q}(n)$ を

$$\begin{cases} S_{q}(0)=0, \\ S_{q}(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}(n), \quad n\in \mathbf{N}, \end{cases}$$

によって定義しよう．$S_{q}(n)$ を「sum of q-adic digits」と呼ぶことにしよう．

1975 年，H. Delange は次の美しい定理を導いた．

定理 (Delange [1]) N を自然数とする．sum of q-adic digits の平均値は，周期 1 の周期関数 $F(x)$ を用いて

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_{q}(n)=\frac{q-1}{2\log q}\log N+F\left(\frac{\log N}{\log q}\right)$$

と表示できる．周期関数 $F(x)$ は具体的に，

$$\text{(I)}\quad F(x)=\frac{q-1}{2}(1+[x]-x) + q^{1+[x]-x}\sum_{r=0}^{\infty}q^{-r}\int_{0}^{q^{r}(q^{-1-[x]+x})}\left([qt]-q[t]-\frac{q-1}{2}\right)dt,$$

$[x]$ はガウス記号，とかける．さらに，$F(x)$ の Fourier 展開は

$$\text{(II)}\quad F(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_k e^{2\pi ikx},\qquad \begin{cases} C_0=\dfrac{q-1}{2\log q}(\log(2\pi)-1)-\dfrac{q+1}{4}, \\ C_k=\dfrac{(1-q)\zeta\left(\frac{2\pi ik}{\log q}\right)}{2\pi ik\left(\frac{2\pi ik}{\log q}+1\right)}, & k\neq 0, \end{cases}$$

$\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数，となる．

Delange の証明は関数論を使わないものであったが，(II) の Fourier 展開については，[2], [6] により関数論を経由すると証明の見通しが良くなることがわかっている．そこで，関数論的アプローチを $q=2$ の場合に限定して簡単に論じてみよう．

非負整数の 2 進表示を BC (Binary Code) と記すことにしよう．即ち，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}=&\{\mathrm{BC}(0),\mathrm{BC}(1),\mathrm{BC}(2),\mathrm{BC}(3),\ldots,\mathrm{BC}(n),\ldots\}\\ =&\{0,1,10,11,100,101,110,111,1000,1001,1010,1011,1100,1101,1110,1111,\ldots\}\end{aligned}$$

とする．そして

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{BC}}(n)=&\mathrm{BC}(n)\text{ における 1 の個数}\\ =&\{0,1,1,2,1,2,2,3,1,2,2,3,2,3,3,4,\ldots\}\end{aligned}$$

と定義しよう．先の sum of 2-adic digits $S_2(n)$ と $S_{\mathrm{BC}}(n)$ は，当然ながら等しい．

[2], [6] による関数論的アプローチでポイントとなる式は

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_{\mathrm{BC}}(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{2^s}{2^s-1}\cdot\frac{\zeta_1(s)N^s}{s(s+1)}ds,\quad \alpha>1, \tag{1}$$

$$\zeta_1(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s},\quad \Re s>0, \tag{2}$$

である．(1) の右辺の被積分関数は虚軸上に等間隔に極を持つ．そこで，積分路を $\Re s=0$ を超えて左にシフトし極の留数を拾うと $F(x)$ の Fourier 展開が得られる．左にシフトした残りの複素積分はちょうど 0 になることが証明できるので，(II) の Fourier 展開の証明が完了する．

さて，この関数論的アプローチは，Flajolet et al. [2] によって，BC を RBC (Reflected Binary Code) に取り替えた場合にも応用された．まずは，RBC を定義しよう．

まず，$\mathcal{G}_0=\{0,1\}$ とする．順序を反転すると $\overleftarrow{\mathcal{G}_0}=\{1,0\}$ となり，さらに，左側に 1 を添えると $\mathcal{G}_0'=\{11,10\}$ を得る．そして，$\mathcal{G}_0$ と $\mathcal{G}_0'$ をつなげたものを $\mathcal{G}_1$ と記そう: $\mathcal{G}_1=\{0,1,11,10\}$．$\mathcal{G}_1$ から同じ操作で $\mathcal{G}_2$ を作る: $\mathcal{G}_2=\{0,1,11,10,110,111,101,100\}$．この作業を無限回繰り返して得られたものが RBC であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{RBC} =&\{0,1,11,10,110,111,101,100,1100,1101,1111,1110,1010,1011,1001,1000,\dots\}\\ =&\{\mathrm{RBC}(0),\mathrm{RBC}(1),\mathrm{RBC}(2),\mathrm{RBC}(3),\mathrm{RBC}(4),\dots,\mathrm{RBC}(n),\dots\}\end{aligned}$$

である．RBC は F. Gray による特許 [3] において活用された．

RBC に付随する sum of digits S_{RBC} を

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{RBC}}(n) =&\mathrm{RBC}(n) \text{ における 1 の個数}\\ =&\{0,1,2,1,2,3,2,1,2,3,4,3,2,3,2,1,\dots\}\end{aligned}$$

によって定義しよう．[2] では

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathrm{RBC}}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{2^s}{2^s-1}\cdot\frac{L(s,\chi_4)N^s}{s(s+1)}ds, \quad \alpha>1, \tag{3}$$

$$L(s,\chi_4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^s}, \quad \Re s>0, \tag{4}$$

$$\chi_4(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n\equiv 0 \mod 4,\\ 1, & \text{if } n\equiv 1 \mod 4,\\ 0, & \text{if } n\equiv 2 \mod 4,\\ -1, & \text{if } n\equiv 3 \mod 4.\end{cases}$$

を導き，積分路をシフトすることにより，$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathrm{RBC}}(n)$ についての Delange の (II) 型の定理を導いている．

以上から，平均値を考えるかどうかは別問題として，S_{BC} と数論的関数 $(-1)^{n-1}$ が, S_{RBC} と数論的関数 χ_4 が密接に関連することが想像でき，もう少し一般的な立場から眺めてみるのは自然であろう．

2 数論的関数たちの全単射

数論的関数のなす集合として，

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbf{N}\cup\{0\}\to\mathbf{C},\ f(0)=0\}$$
$$\mathcal{B} = \{S : \mathbf{N}\cup\{0\}\to\mathbf{C},\ S(0)=0\}$$

を導入しよう．写像 $\Phi : \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $\Phi(f)=S$, $f\in\mathcal{A}$, $S\in\mathcal{B}$, を

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{0\le a\le \frac{n}{2^k}} f(a)$$

によって定義し，写像 $\Psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $\Psi(S) = f$, $S \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{A}$, を

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0, \\ S(n) - S(n-1) - \left(S\left(\frac{n}{2}\right) - S\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right), & \text{if } n \geq 2 \text{ is even}, \\ S(n) - S(n-1), & \text{if } n \text{ is odd}, \end{cases}$$

によって定義する．このとき次が証明できる．

定理 1 ([4]) 写像 Φ は全単射で，$\Psi(\Phi(f)) = f$ かつ $\Phi(\Psi(S)) = S$ が成立する．即ち，$\Phi^{-1} = \Psi$ となる．

次の表 1 は，$S_{\mathrm{BC}} \in \mathcal{B}$ に対して，$\Phi^{-1}(S_{\mathrm{BC}})$ を計算したものであり，(2) における Dirichlet 係数 $(-1)^{n-1}$ の由来を理解することができる．

表 1 BC とその sum of digits

n	BC	$S(n)$	$S(n)-$ $S(n-1)$	$S(\frac{n}{2})-$ $S(\frac{n}{2}-1)$	$f(n)$
0	00000	0			
1	00001	1	1		1
2	00010	1	0	1	−1
3	00011	2	1		1
4	00100	1	−1	0	−1
5	00101	2	1		1
6	00110	2	0	1	−1
7	00111	3	1		1
8	01000	1	−2	−1	−1
9	01001	2	1		1
10	01010	2	0	1	−1
11	01011	3	1		1
12	01100	2	−1	0	−1
13	01101	3	1		1
14	01110	3	0	1	−1
15	01111	4	1		1
16	10000	1	−3	−2	−1
17	10001	2	1		1
18	10010	2	0	1	−1
19	10011	3	1		1
20	10100	2	−1	0	−1
21	10101	3	1		1
22	10110	3	0	1	−1
23	10111	4	1		1
24	11000	2	−2	−1	−1
25	11001	3	1		1
26	11010	3	0	1	−1
27	11011	4	1		1
28	11100	3	−1	0	−1
29	11101	4	1		1
30	11110	4	0	1	−1
31	11111	5	1		1

次の表 2 は，$S_{\mathrm{RBC}} \in \mathcal{B}$ に対して，$\Phi^{-1}(S_{\mathrm{RBC}})$ を計算したものであり，(4) における Dirichlet 係数 $\chi_4(n)$ の由来を理解することができる．

表 2 RBC とその sum of digits

n	RBC	$S(n)$	$S(n)-S(n-1)$	$S(\frac{n}{2})-S(\frac{n}{2}-1)$	$f(n)$	n	RBC	$S(n)$	$S(n)-S(n-1)$	$S(\frac{n}{2})-S(\frac{n}{2}-1)$	$f(n)$
0	00000	0				16	11000	2	1	1	0
1	00001	1	1		1	17	11001	3	1		1
2	00011	2	1	1	0	18	11011	4	1	1	0
3	00010	1	−1		−1	19	11010	3	−1		−1
4	00110	2	1	1	0	20	11110	4	1	1	0
5	00111	3	1		1	21	11111	5	1		1
6	00101	2	−1	−1	0	22	11101	4	−1	−1	0
7	00100	1	−1		−1	23	11100	3	−1		−1
8	01100	2	1	1	0	24	10100	2	−1	−1	0
9	01101	3	1		1	25	10101	3	1		1
10	01111	4	1	1	0	26	10111	4	1	1	0
11	01110	3	−1		−1	27	10110	3	−1		−1
12	01010	2	−1	−1	0	28	10010	2	−1	−1	0
13	01011	3	1		1	29	10011	3	1		1
14	01001	2	−1	−1	0	30	10001	2	−1	−1	0
15	01000	1	−1		−1	31	10000	1	−1		−1

次の節からは，BC は考察から除き，RBC を拡張したものを扱っていこう．

3 無限 Gray 符号とその sum of digits

RBC はその構成の仕方から，連続した単語 RBC(n) と RBC($n+1$) における文字 0, 1 がちょうど一箇所でのみ変化している．大雑把に言って，0, 1 から構成される単語の列で，連続した単語における文字がちょうど一箇所でのみ変化しているものが **Gray 符号**である．ただ，Gray 符号の定義は文献によって様々な気がする．まずは，この論考で考察する (特殊な)Gray 符号の定義をはっきりさせておこう．

定義 1 L は自然数とする．0, 1 の L 個の連なりによって構成される単語全てからなる集合を

$$\mathcal{G}_0 = \{\mathcal{G}_0(0), \mathcal{G}_0(1), \dots, \mathcal{G}_0(2^L-1)\}$$

としよう．ただし，$\mathcal{G}_0(0)$ は 0 が L 個並んでいるとする．連続した単語 $\mathcal{G}_0(n)$ と $\mathcal{G}_0(n+1)$, $0 \le n \le 2^L-2$, における文字 0, 1 がちょうど一箇所でのみ変化しているとき，$\mathcal{G}_0$ を **L-bit の Gray 符号**という．さらに，最後の単語 $\mathcal{G}_0(2^L-1)$ と最初の単語 $\mathcal{G}_0(0)$ も文字 0, 1 がちょうど一箇所でのみ変化しているとき，$\mathcal{G}_0$ を **L-bit の cyclic な Gray 符号**という．

例 $\{0,1\}$ は 1-bit の cyclic な Gray 符号，$\{000,001,011,111,101,100,110,010\}$ は 3-bit の cyclic な Gray 符号である．

L-bit の cyclic な Gray 符号は L 次元立方体の Hamilton サイクルと同一視することができる．上の例の前者は 1 次元立方体の Hamilton サイクル，後者は 3 次元立方体の Hamilton サイクルである．多くの文献では，ある L が存在して，L 次元立方体の Hamilton サイクルと同一視される単語の集合を Gray 符号と定義しているように思う．一方で，RBC は単語の無限列であり，これも Gray 符号と呼ばれることが多い．この意味で，Gray 符号の定義が一定でないように感じるのであるが，定義をはっきりさせるのは今後の課題であろう．

本論考では，L 次元立方体の Hamilton サイクルと同一視される L-bit の cyclic な Gray 符号 $\mathcal{G}_0$ を RBC を構成する手順によって無限列に延長したものを「無限 Gray 符号」と呼ぶことにする．即ち，次の定義を導入しよう．

定義 2 $\mathcal{G}_0$ は L-bit の cyclic な Gray 符号とする．$\mathcal{G}_0$ を以下の手順で無限列に延長したものを $\mathcal{G}$ と記し，$\mathcal{G}_0$ **によって誘導される無限 Gray 符号**と呼ぶ：

$$\mathcal{G}_0 = \{\mathcal{G}_0(0), \mathcal{G}_0(1), \ldots, \mathcal{G}_0(2^L - 1)\}$$

の順序を反転して

$$\overleftarrow{\mathcal{G}}_0 = \{\mathcal{G}_0(2^L - 1), \ldots, \mathcal{G}_0(1), \mathcal{G}_0(0)\}$$

とし，さらに，左側に 1 を添えて

$$\mathcal{G}_0' = \{1 \oplus \mathcal{G}_0(2^L - 1), \ldots, 1 \oplus \mathcal{G}_0(1), 1 \oplus \mathcal{G}_0(0)\}$$

とする．そして，$\mathcal{G}_0$ と $\mathcal{G}_0'$ をつなげて

$$\mathcal{G}_1 = \{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0'\}$$

とする．$\mathcal{G}_1$ は $(L+1)$-bit の cyclic な Gray 符号である．この手順を繰り返すことにより，帰納的に $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, …, と Gray 符号の列が構成でき，$\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G} = \lim_{j \to \infty} \mathcal{G}_j$$

によって定める．

例 RBC は 1-bit の cyclic な Gray 符号 $\{0,1\}$ から誘導される無限 Gray 符号である．

定義 3 $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ は無限 Gray 符号とする．$\mathcal{G}$ に付随する sum of digits $S_{\mathcal{G}}$ を

$$S_{\mathcal{G}}(n) = \mathcal{G}(n) \text{ における } 1 \text{ の個数}$$

で定義する．

3-bit の cyclic な Gray 符号 $\{000,001,011,111,101,100,110,010\}$ から誘導される無限 Gray 符号を AG3 と記すことにする．次の表 3 は，$S_{\mathrm{AG3}} \in \mathcal{B}$ に対して，$\Phi^{-1}(S_{\mathrm{AG3}})$ を計算したものである．

表 3 AG3 とその sum of digits

n	AG3	$S(n)$	$S(n)-$ $S(n-1)$	$S(\frac{n}{2})-$ $S(\frac{n}{2}-1)$	$f(n)$
0	00000	0			
1	00001	1	1		1
2	00011	2	1	1	0
3	00111	3	1		1
4	00101	2	−1	1	−2
5	00100	1	−1		−1
6	00110	2	1	1	0
7	00010	1	−1		−1
8	01010	2	1	−1	2
9	01110	3	1		1
10	01100	2	−1	−1	0
11	01101	3	1		1
12	01111	4	1	1	0
13	01011	3	−1		−1
14	01001	2	−1	−1	0
15	01000	1	−1		−1
16	11000	2	1	1	0
17	11001	3	1		1
18	11011	4	1	1	0
19	11111	5	1		1
20	11101	4	−1	−1	0
21	11100	3	−1		−1
22	11110	4	1	1	0
23	11010	3	−1		−1
24	10010	2	−1	1	−2
25	10110	3	1		1
26	10100	2	−1	−1	0
27	10101	3	1		1
28	10111	4	1	−1	2
29	10011	3	−1		−1
30	10001	2	−1	−1	0
31	10000	1	−1		−1
32	110000	2	1	1	0
33	110001	3	1		1
34	110011	4	1	1	0
35	110111	5	1		1
36	110101	4	−1	1	−2
37	110100	3	−1		−1
38	110110	4	1	1	0
39	110010	3	−1		−1
40	111010	4	1	−1	2
41	111110	5	1		1
42	111100	4	−1	−1	0
43	111101	5	1		1
44	111111	6	1	1	0
45	111011	5	−1		−1
46	111001	4	−1	−1	0
47	111000	3	−1		−1
48	101000	2	−1	−1	0
49	101001	3	1		1
50	101011	4	1	1	0
51	101111	5	1		1
52	101101	4	−1	−1	0
53	101100	3	−1		−1
54	101110	4	1	1	0
55	101010	3	−1		−1
56	100010	2	−1	1	−2
57	100110	3	1		1
58	100100	2	−1	−1	0
59	100101	3	1		1
60	100111	4	1	−1	2
61	100011	3	−1		−1
62	100001	2	−1	−1	0
63	100000	1	−1		−1

4 $f_{\mathcal{G}} = \Phi^{-1}(S_{\mathcal{G}})$ の性質

$\mathcal{G}_0$ は L-bit の cyclic な Gray 符号とし，$\mathcal{G}_0$ によって誘導される無限 Gray 符号を $\mathcal{G}$ とする．$\mathcal{G}$ に付随する sum of digits $S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{B}$ に対して，定理 1 により，$\mathcal{A}$ の元 $f_{\mathcal{G}} = \Phi^{-1}(S_{\mathcal{G}})$ が対応する．$f_{\mathcal{G}}$ が有する性質を表 2 と表 3 を通して (表 2 では $L = 1$ として，表 3 では $L = 3$ として) 観察してみると，次に気づく．

(i) $f_{\mathcal{G}}(n)$ は 0, ±1, ±2 しか値をとらない．

(ii) $f_{\mathcal{G}}(n)$ は周期 2^{L+2} の周期関数である．

(iii) $f_{\mathcal{G}}(n)$ の値は $n = 2^{L+1}$ で点対称である．

(iv) $f_{\mathcal{G}}(n)$ の値を $n = 0$ から $n = 2^{L+1} - 1$ まで足しあげると 0 になる．

実際にこれらの性質は証明することができ，次を得る．

定理 2 ([4]) $\mathcal{G}_0$ は L-bit の cyclic な Gray 符号とし，$\mathcal{G}_0$ によって誘導される無限 Gray 符号を $\mathcal{G}$ とする．$\mathcal{G}$ に付随する sum of digits $S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{B}$ に対して，定理 1 により，$\mathcal{A}$ の元 $f_{\mathcal{G}} = \Phi^{-1}(S_{\mathcal{G}})$ が対応する．この $f_{\mathcal{G}}$ は次の性質を有する．

(i) [$f_{\mathcal{G}}$ の取り得る値]

$$f_{\mathcal{G}}(n) = \begin{cases} \pm 1, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 0, \pm 2, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

(ii) [$f_{\mathcal{G}}$ の周期性]

$$f_{\mathcal{G}}(n) = f_{\mathcal{G}}(n - 2^{L+2}), \quad n \geq 2^{L+2}.$$

(iii) [$f_{\mathcal{G}}$ の点対称性]

$$f_{\mathcal{G}}(n) = -f_{\mathcal{G}}(2^{L+2} - n), \quad 0 \leq n \leq 2^{L+2}.$$

(iv) [ゼロ和の性質]

$$\sum_{n=0}^{2^{L+1}-1} f_{\mathcal{G}}(n) = 0.$$

5 再び Delange の定理へ

記号は前節で用いたものを継承する．数論的関数 $f_{\mathcal{G}} = \Phi^{-1}(S_{\mathcal{G}})$ を Dirichlet 係数とする Dirichlet 級数

$$L(s, f_{\mathcal{G}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\mathcal{G}}(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma,\ t \in \mathbf{R}$$

を導入しよう．定理 2 (i) により $f_{\mathcal{G}}$ は有界なので，この Dirichlet 級数は $\sigma > 1$ で絶対収束する．$L(s, f_{\mathcal{G}})$ を巻き込む形で，(3) は次のように拡張することができる：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{G}}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{2^s}{2^s - 1} \cdot \frac{L(s, f_{\mathcal{G}}) N^s}{s(s+1)} ds, \quad \alpha > 1. \tag{5}$$

右辺の積分路を左にシフトしたいので，$L(s, f_{\mathcal{G}})$ の解析接続やオーダー評価が必要になってくるが，これらは容易に調べられる．なぜならば，定理 2 (ii) により $L(s, f_{\mathcal{G}})$ は Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s, a)$ の線型結合でかけるからである．実際に計算してみると，

$$
\begin{aligned}
L(s, f_{\mathcal{G}}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{L+2}} \frac{f_{\mathcal{G}}(m + j2^{L+2})}{(m + j2^{L+2})^s} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{L+2}} \frac{f_{\mathcal{G}}(m)}{(m + j2^{L+2})^s} \\
&= \frac{1}{2^{(L+2)s}} \sum_{m=1}^{2^{L+2}} f_{\mathcal{G}}(m) \zeta\Big(s, \frac{m}{2^{L+2}}\Big)
\end{aligned}
$$

となり，$\zeta(s, a)$ の解析性から，$s = 1$ 以外への $L(s, f_{\mathcal{G}})$ の解析接続が従う．さらに，定理 2 (iii) (iv) により，$s = 1$ でも $L(s, f_{\mathcal{G}})$ が正則であることが証明できる．また，Hurwitz ゼータ関数の関数等式により，$L(s, f_{\mathcal{G}})$ の関数等式も得られる．$L(s, f_{\mathcal{G}})$ の解析的性質をまとめておこう．

命題

(i) $L(s, f_{\mathcal{G}})$ は整関数である．

(ii) $L(s, f_{\mathcal{G}})$ は関数等式

$$
\Big(\frac{\pi}{2^{L+2}}\Big)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big) L(s, f_{\mathcal{G}}) = \frac{i}{\sqrt{2^{L+2}}} \Big(\frac{\pi}{2^{L+2}}\Big)^{-\frac{2-s}{2}} \Gamma\Big(\frac{2-s}{2}\Big) L(1-s, \widehat{f_{\mathcal{G}}})
$$

をもつ．ただし，$\widehat{f_{\mathcal{G}}}$ は $f_{\mathcal{G}}$ の離散 Fourier 変換

$$
\widehat{f_{\mathcal{G}}}(n) = \sum_{m=1}^{2^{L+2}} f_{\mathcal{G}}(m) e^{-2\pi i n \frac{m}{2^{L+2}}}
$$

である．

(iii) $L(s, f_{\mathcal{G}})$ は垂直帯領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < 0$ に属する s について一様に

$$
L(s, f_{\mathcal{G}}) \ll (1 + |t|)^{\frac{1}{2} - \sigma}
$$

と評価される．

さて，(5) の右辺の被積分関数は虚軸上に等間隔に極を持つ．そこで，積分路を $\Re s = \beta$, $-\frac{1}{2} < \beta < 0$, にシフトし極の留数を拾う．左にシフトした残りの複素積分は別の表示に書き換えることができる．こうして，Delange の定理の一つの拡張として，次を得る．

定理3 ([5]) $\mathcal{G}_0$ は L-bit の cyclic な Gray 符号とし，$\mathcal{G}_0$ によって誘導される無限 Gray 符号を $\mathcal{G}$ とする．$\mathcal{G}$ に付随する sum of digits $S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{B}$ に対して，定理1により，$\mathcal{A}$ の元 $f_{\mathcal{G}} = \Phi^{-1}(S_{\mathcal{G}})$ が対応する．$[0,\infty)$ 上の関数 $\xi_{\mathcal{G}}(x)$ を

$$\xi_{\mathcal{G}}(x) = \sum_{0\le n\le x} f_{\mathcal{G}}(n)$$

によって定義する．N は自然数とする．このとき，$S_{\mathcal{G}}$ の平均値は，周期1の周期関数 $F(x)$ と周期 2^{L+1} の周期関数 $G(N)$ を用いて

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{G}}(n) = \frac{\log N}{2\log 2} + F\Big(\frac{\log N}{\log 2}\Big) - \frac{1}{N}G(N)$$

と表示できる．周期関数 $F(x)$ は具体的に，

$$\text{(I)}\quad F(x) = \frac{1+[x]-x}{2} + 2^{[x]-x}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^{2^{-[x]+x}}\Big(\xi_{\mathcal{G}}(2^j t) - \frac{1}{2}\Big)dt$$

$[x]$ はガウス記号，とかけ, 周期関数 $G(N)$ は具体的に，

$$G(N) = \sum_{j=1}^{L}\frac{1}{2^j}\int_0^{2^j N}\Big(\xi_{\mathcal{G}}(x) - \frac{1}{2}\Big)dx.$$

とかける．さらに，$F(x)$ の Fourier 展開は

$$\text{(II)}\quad F(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} E_k e^{2\pi i k x},$$

$$\begin{cases} E_0 = -\dfrac{L}{2} - \dfrac{1}{2\log 2} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{\log 2}\displaystyle\sum_{m=1}^{2^{L+2}} f_{\mathcal{G}}(m)\log\Gamma\Big(\frac{m}{2^{L+2}}\Big), & \\ E_k = \dfrac{L\big(\frac{2\pi i k}{\log 2}, f_{\mathcal{G}}\big)}{2\pi i k\big(\frac{2\pi i k}{\log 2}+1\big)}, & k \ne 0, \end{cases}$$

となる．

6　まとめと今後の課題

Gray 符号 $\mathcal{G}$ に付随する sum of digits $S_{\mathcal{G}}$ は，$\mathcal{G}$ に属する単語における1の個数なのだから，基本的かつ重要な量と思われる．この $S_{\mathcal{G}}$ が，定理1を通して数論的関数 $f_{\mathcal{G}}$ に翻訳される．定理2は $\mathcal{G}$ の性質が自然に $f_{\mathcal{G}}$ に反映したものであるといえよう．この観点に立つことにより，Delange の定理の (I) 型も (II) 型も同等に自然にみることができ，一つの拡張である定理3を導くことができた．

今後の課題としては，Gray 符号本体の研究を進める必要があろう．今回の研究ではGray 符号の特殊な場合を扱ったので，さらに一般化を目指すことは自然であると思われる．

参考文献

[1] H. Delange, Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", L'Enseignement Math., **21**, 31–47 (1975).

[2] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhofer, H. Prodinger, F. Tichy, Mellin transforms and asymptotics: Digital sums, Theoretical Computer Science, 123, 291–314 (1994).

[3] F. Gray, Pulse Code Communications. U.S. Patent 2632058, March 1953.

[4] Y. Kamiya and L. Murata, A relation between arithmetical functions and code systems, submitted.

[5] L. Murata and Y. Kamiya, On the average of sum of digits function for Gray codes, submitted.

[6] J. L. Mauclaire and L. Murata, An explicit formula for the average of some q-additive functions, Proc. Prospects of Math, Sci. Pub. 141–156 (1988).